REVISTA ENLACE QUIMICO
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
VOL2, NUM 8 NOVIEMBRE DEL 2010
No 04-2010-101813383300-102 ®

NÚMERO ESPECIAL
HOMENAJE A LA TRAYECTORIA
DEL DR. J. DE JESÚS GARCIA SOTO

LA HIPÓTESIS DE RIEMANN
(THE RIEMANN HYPOTHESIS)

Dedicado a la memoria de J. de Jesús García Soto

Manuel Cruz López

Jalisco S/N Mineral de Valenciana, Guanajuato, Gto. 36240. MÉXICO

(473) 102 61 02 y 03, Fax. 2523

manuel.cruzlopez@gmail.com

http://www.demat.ugto.mx/manuel/index.html

Departamento de Matemáticas, División de Ciencias Naturales y Exactas

Universidad de Guanajuato

Bernhard Riemann *(1826—1866)

Palabras clave: Números primos, función zeta, identidad de Euler.

Resumen

En este artículo hacemos una breve descripción de uno de los grandes problemas aún no resueltos en Matemáticas conocido como la Hipótesis de Riemann, formulado por Bernhard Riemann en 1859. El tratar de resolver este problema ha dado lugar a un gran desarrollo de las Matemáticas en los últimos 150 años.

* Georg Friedrich Bernhard Riemann nació en 1826 en Alemania y murió en 1866 en Italia. Presentó su tesis doctoral bajo la supervisión de C.F. Gauss en 1851 en la Universidad de Göttingen. Fue contemporáneo de diversos matemáticos y físicos distinguidos como F.G.M. Eisenstein, L. Dirichlet, W.E. Weber y J.B. Listing, entre otros.

Key words: Prime numbers, zeta function, Euler identity.

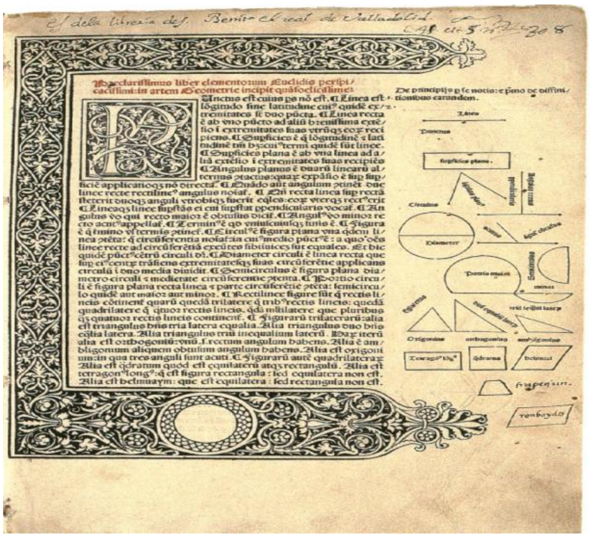
Abstract

In this paper we present a brief description of one of the most important still unsolved problems in Mathematics known as the Riemann Hypothesis, established by Bernhard Riemann in 1859. In the efforts for trying to solve this problem there has been an important development in Mathematics during the last 150 years.

§1. La distribución de los números primos

Los inicios…

Uno de los muchos resultados importantes establecidos en los *Elementos de Euclides* es el que concierne a la existencia de una cantidad infinita de números primos. Entre otras cosas, el “método” de demostración introducido en los *Elementos*, marcó una era en la forma de hacer y pensar a la matemática.



Fragmento de los Elementos de Euclides

Por la misma época en que se escribieron los *Elementos* alrededor del año 300 A.C. se estableció el llamado *Teorema Fundamental de la Aritmética*, que afirma que todo número entero se puede expresar, de manera única, como un producto de todos sus factores primos; por ejemplo, $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$. Este importante teorema deja sin resolver el también antiguo problema de la distribución de los números primos, que pretende determinar, para un entero dado n, la cantidad de números primos que son menores o iguales que n, así como el comportamiento de esta distribución de números.

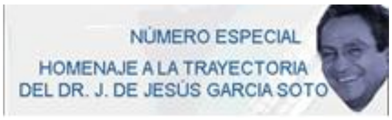
La distribución de los números primos

Un primer intento por describir la distribución de los números primos es la llamada *Criba de Eratóstenes*, la cual nos permite determinar, para un entero n, todos los números primos que son menores o iguales que él. Recordemos que este método consiste en escribir en un cuadrado los primeros n números; después *marcamos* el 2 y eliminamos todos sus múltiplos, luego marcamos el 3 y eliminamos todos sus múltiplos, y así sucesivamente, marcamos el siguiente número primo y eliminamos todos sus múltiplos. Al final del proceso habremos obtenido todos los números primos que son menores o iguales que n. Es claro que este método funciona bien para números pequeños. Si n es muy grande, entonces el método es completamente inapropiado.

Otro intento por resolver este problema fue dado por Pierre de Fermat (1601—1665) quién, sin dar una demostración, señaló que la expresión $f(n)=2^{2^n}+1$ permitía encontrar números primos, aunque no necesariamente todos los primos. Pocos años después, Leonhard Euler (1707—1783) encontró que $f(5)$ no es un número primo. Posteriormente se hicieron otros intentos por encontrar expresiones algebraicas que describieran números primos. Tiempo después se planteó determinar la distribución de los números primos en progresiones aritméticas de la forma $a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$. Pasaron algunos años hasta que Lejeune Dirichlet (1805—1859), utilizando técnicas desarrolladas del análisis matemático, probó que en cualquier progresión aritmética hay un número infinito de primos.

Después de muchos intentos para tratar de encontrar la *Ley de distribución de los números primos*, los matemáticos se olvidaron de las fórmulas y se preguntaron por la “distribución promedio” de los números primos dentro de los números enteros. Para ver un poco más de cerca esta idea, supongamos que n es un número entero y denotemos por A_n al número de primos que son menores o iguales que n. Esto es,

$$A_n := \left|\{p : 1 < p \le n, \quad p \ primo\}\right|.$$



Por ejemplo, $A_1 = 0, A_2 = 1, A_3 = A_4 = 2, A_5 = A_6 = 3, A_7 = A_8 = A_9 = A_{10} = 4,$ etc.

Es claro que si tomamos una sucesión de valores crecientes de n, entonces la sucesión A_n también es creciente. La "densidad" de los números primos entre los primeros n enteros está dada por el cociente A_n/n.

La Ley que gobierna el comportamiento de este cociente es uno de los descubrimientos más importantes e intrigantes en toda la matemática...

De un estudio empírico de tablas de números primos, Carl Friedrich Gauss (1777—1855) observó que el cociente A_n/n es "aproximadamente" igual a $1/\log(n)$, y esta aproximación "parece" mejorar cuando n se hace muy grande. Esto es, $A_n/n \sim 1/\log(n)$. Sobre esta base empírica, Gauss conjeturó que el cociente A_n/n es "asintóticamente igual" a $1/\log(n)$. Este comportamiento límite se puede expresar en la forma

$$\frac{A_n/n}{1/\log(n)} \to 1,$$

cuando $n \to \infty$. Esta fórmula nos dice que, conforme el número n toma valores cada vez más grandes, el promedio A_n/n de todos los números primos que son menores o iguales que n, se "parece" cada vez más al valor $1/\log(n)$.

Más tarde, Bernhard Riemann (1826—1866) dio la estrategia para demostrar este resultado, el cual fue probado por Jaques Hadamard, e independientemente, por de la Vallée Poussin, en 1896.

§2. La función zeta de Riemann

Recordemos primero que el sistema de números complejos **C** consiste de todos aquellos números que se pueden expresar en la forma $s = x + iy$, donde x y y son números reales e $i = \sqrt{-1}$. Estos números tienen bien definida una suma y multiplicación y estas operaciones satisfacen las propiedades usuales de las operaciones de los números reales. Podemos también representar a estos números como puntos en el plano xy, esto es, como parejas "ordenadas" (x, y), donde la coordenada x, llamada la *parte real* de s, se denota por $\mathrm{Re}(s)$, y la coordenada y, llamada la *parte imaginaria* de s, se denota por $\mathrm{Im}(s)$. Se pueden también definir potencias de números complejos utilizando las funciones exponencial y logaritmo complejos.

Si s es una variable compleja, definimos la **función zeta de Riemann** como

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

La función $\zeta(s)$ está bien definida en el semiplano derecho $\mathrm{Re}(s) > 1$, esto es, en el subconjunto del plano complejo **C** que consiste de todos aquellos números cuya parte real es mayor que 1. En esta región, la función $\zeta(s)$ es continua y diferenciable en el sentido de la variable compleja; esto se expresa diciendo que $\zeta(s)$ representa a una función *analítica* en el semiplano $\mathrm{Re}(s) > 1$. Un primer resultado importante probado por Riemann es que la función $\zeta(s)$ está bien definida en todo el plano complejo **C**, excepto en 1 y representa a una función analítica en esa región.

Es importante señalar que Riemann fue uno de los principales contribuidores al desarrollo de la teoría de funciones analíticas, por lo que en su estudio de la función zeta él estaba principalmente interesado en este tipo de propiedades.

La función $\zeta(s)$ satisface la llamada **Identidad de Euler:**

$$\zeta(s) = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}},$$

donde el producto se toma sobre el conjunto de todos los números primos. La expresión en el lado derecho significa que tomamos el producto infinito de todos los factores de la forma $\frac{1}{(1 - p^{-s})}$, para cada número primo p; por ejemplo, los primeros factores son $\frac{1}{(1 - 2^{-s})}$, $\frac{1}{(1 - 3^{-s})}$, etc.

La identidad de Euler expresa el teorema fundamental de la aritmética en una sola ecuación y muestra también la naturaleza “aritmética” de la función zeta. Esto se puede ver en la siguiente idea. De acuerdo con el teorema fundamental de la aritmética, todo número entero n se puede descomponer como producto de sus factores primos en la forma $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_s^{r_s}$, donde $p_1, p_2, \ldots, p_s$ son números primos y $r_1, r_2, \ldots, r_s \geq 0$ son números enteros. Por otro lado, usando propiedades de convergencia de la función zeta podemos escribirla en la forma

$$\zeta(s) = \sum_{r_2, r_3, \cdots \geq 0} (2^{r_2} 3^{r_3} \cdots)^{-s}.$$

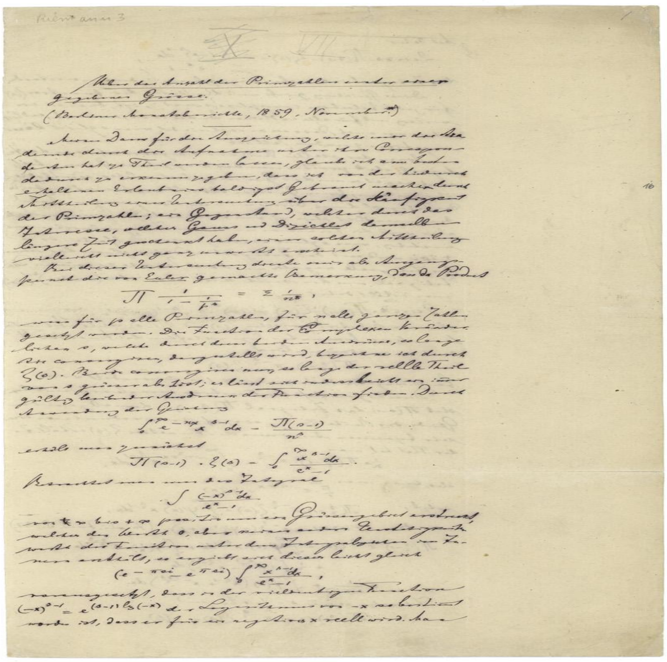
(Zagier, 1997) Esta relación nos muestra que todo número entero n aparece factorizado dentro de la función zeta; en otras palabras, en una sola expresión de la función $\zeta(s)$ podemos describir la descomposición de todo número entero como producto de sus factores primos, tal como lo establece el teorema fundamental de la aritmética.

§3. La Hipótesis de Riemann

Utilizando la identidad de Euler es posible probar que $\zeta(s) \neq 0$ si $\mathrm{Re}(s) > 1$. Los únicos ceros de $\zeta(s)$ en el dominio $\mathrm{Re}(s) < 0$ están en los argumentos $s = -2, -4, -6, \ldots$. Estos son los llamados **ceros triviales** de $\zeta(s)$. Los otros ceros tienen que estar en la **banda crítica** $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$, ya que $\zeta(s) \neq 0$ si $\mathrm{Re}(s) > 1$. Esta discusión nos lleva al siguiente problema aún no resuelto:

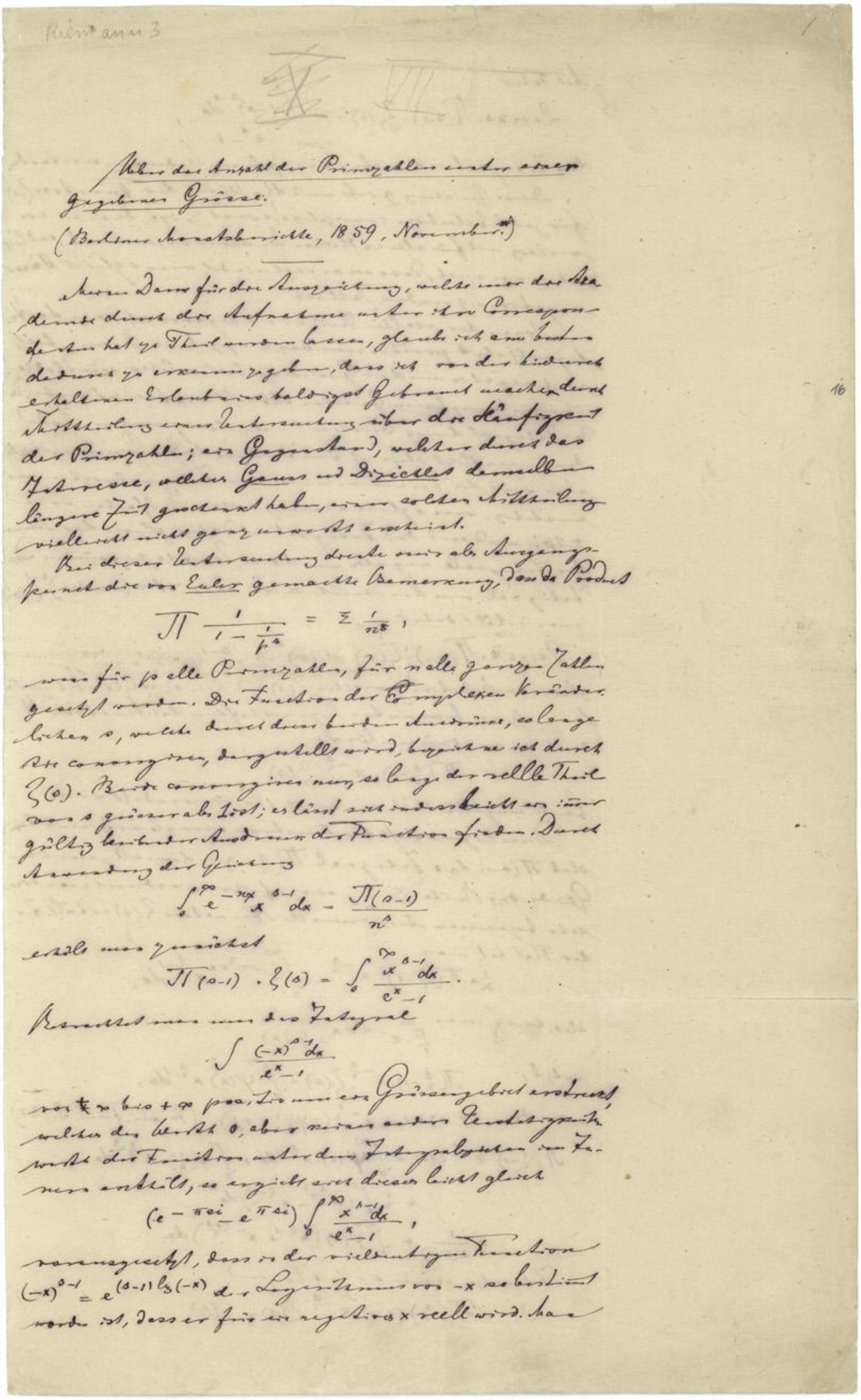
Hipótesis de Riemann: *Los ceros no—triviales de* $\zeta(s)$ *están en la recta* $\mathrm{Re}(s) = 1/2$.

B. Riemann, en su artículo *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Sobre el número de números primos menores que una cantidad dada), publicado en 1859, planteó este problema que



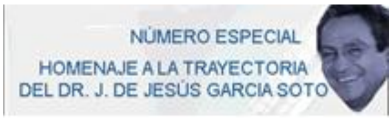
REVISTA ENLACE QUIMICO
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
VOL2, NUM 8 NOVIEMBRE DEL 2010
No 04-2010-101813383300-102 ®

desde entonces ha sido objeto de estudio por parte de muchos grandes matemáticos. Se ha verificado para cientos de millones de ceros y actualmente, The Clay Mathematics Institute estableció, en el año 2000, un premio de 1 millón de dólares, a quien logre resolver este problema. Fragmento del artículo original de Riemann



Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse.
(Berliner Monatsberichte, 1859. November.)

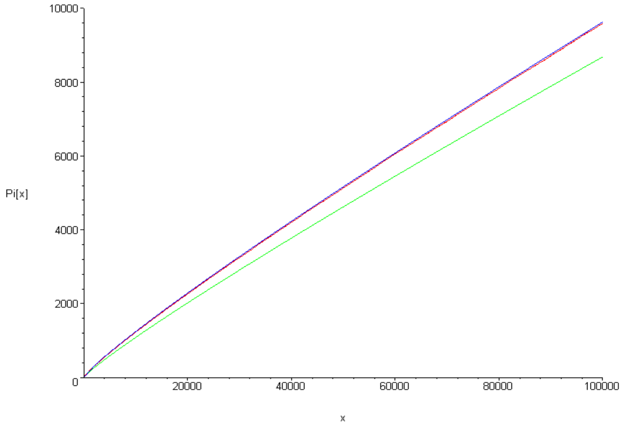
REVISTA ENLACE QUIMICO
UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
VOL2, NUM 8 NOVIEMBRE DEL 2010
No 04-2010-101813383300-102 ®



La Hipótesis de Riemann tiene consecuencias inmediatas para el problema de la distribución de los números primos en todos los números naturales. Esto se puede ver en la siguiente idea: Si x es un número entero, la función $\pi(x)$ definida por

$$\pi(x) = \left|\{p : p \leq x, \quad p \ primo\}\right|,$$

determina el número de primos que son menores o iguales que x. La gráfica de la función $\pi(x)$ se ve de la siguiente forma:



Gráfica de $\pi(x)$ [roja] comparada con $x/\log(x)$ [verde].

Un análisis cuidadoso de la gráfica de la función $\pi(x)$ muestra que, a escala microscópica, la función $\pi(x)$ es una función escalonada con un comportamiento "altamente irregular". Sin embargo, a grandes escalas, la función $\pi(x)$ tiene un comportamiento "altamente regular". Esta y muchas otras propiedades de la función $\pi(x)$ hacen que sea uno de los más grandes misterios en matemáticas….

Agradecimientos: Agradezco al Dr. J. de Jesús García Soto por su sincera amistad, breve, pero muy intensa; le agradezco también por las muchas palabras de aliento que me brindó en tiempos de incertidumbre. Agradezco también a Aurea Patricia Virgen Vázquez por la gran ayuda que me proporcionó en la "traducción" del texto original a Word. Finalmente, quiero agradecer al colega que realizó la labor de revisión del artículo, por sus muy atinados comentarios que permitieron mejorar considerablemente el manuscrito.

Referencias

Ingham, A.E. (1932). The distribution of prime numbers, Cambridge University Press.

Karatsuba, A.A. and Voronin, S.M. (1992). The Riemann zeta—function, De Gruyter Expositions in Mathematics No. **5**., Walter de Gruyter.

Neurkirch, J. (1999). Algebraic number theory, Springer—Verlag.

Ribenboim, P. (1996). The new book of prime number records, Springer—Verlag.

Riemann, B. (1859). *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (On the number of prime numbers less than a given quantity), Monatsberichte der Berliner Akademie, November (Traducido por D. R. Wilkins, 1998.)

Weil, A. (1973). Basic number theory, Classics in Mathematics, Springer—Verlag.

Zagier, D. (1997). Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem, The American Mathematical Monthly, Vol. **104**, No. 8, pp. 705—708.