Naturaleza y Tecnología
Septiembre-Diciembre 2021
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

Apuntes de Cálculo Vectorial: Proyecciones y transformación de coordenadas

Héctor Ismael Olmos Castillo, Universidad de Guanajuato, Campus Guanajuato, Col. Noria Alta S/N, Guanajuato, Gto.

Resumen

Las proyecciones de algún campo vectorial sobre un vector, son un tópico de importancia para usar en la metodología de transformación de coordenadas. Usualmente se confunde expresar coordenadas cartesianas en equivalentes discretos de expresiones entre sistemas, que en la transformación misma. Pues queda pendiente la proyección del indicador del vector cartesiano en el nuevo sistema coordenado.

Introducción

Un vector tiene información de magnitud y dirección. El vector 2i+3j+9k indica que hay tres ejes sobre donde tiene acción. En el eje x el componente es 2, en el eje y el componente es 3 y en el eje z el componente es 9.

La proyección del vector sobre el eje x es el vector V1=2i; La proyección sobre el plano xz sería V2=2i+9k.

El ángulo entre dos vectores se calcula a partir de la ecuación del producto punto de dos vectores unitarios.

$$\cos(\theta) = \frac{V \cdot V_1}{|V||V_1|}$$

Es decir el vector V=2i+3j+9k con respecto a su proyección V1, presenta un ángulo de 78°

$$\cos(\theta) = \frac{[2i + 3j + 9k] \cdot [2i]}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 9^2}\sqrt{2^2}} = \frac{4}{9.69 * 2} = 0.2062;\ \theta = 78.13°$$

De acuerdo con (Florey 1988), la proyección de un vector sobre otro vector se puede calcular por la ecuación

$$V_3 = \frac{V \cdot W_1}{W_1 \cdot W_1} W_1$$

Sabemos que la proyección del vector V sobre el plano xy es V2; Entonces la proyección del vector V sobre V2 sería V2 mismo.

$$V_2 = \frac{V \cdot V_2}{V_2 \cdot V_2} V_2 = \frac{[2i + 3j + 9k] \cdot [2i + 9k]}{[2i + 9k] \cdot [2i + 9k]} [2i + 9k] = \frac{4 + 81}{4 + 81} [2i + 9k] = [2i + 9k]$$

Sin embargo la proyección de V sobre W1=9i+j-2k

$$V_3 = \frac{V \cdot W_1}{W_1 \cdot W_1} W_1 = \frac{[2i + 3j + 9k] \cdot [9i + j - 2k]}{[9i + j - 2k] \cdot [9i + j - 2k]} [9i + j - 2k] = \frac{18 + 3 - 18}{81 + 1 + 4} [9i + j - 2k]$$
$$= \frac{3}{86} [9i + j - 2k]$$

Resulta lógico pensar que la proyección del vector V3 sobre V seria V mismo; pues se regresaría al estado original.

$$V_P = \frac{V_3 \cdot V}{V \cdot V} V = \frac{3}{86} \frac{[9i + j - 2k] \cdot [2i + 3j + 9k]}{[2i + 3j + 9k] \cdot [2i + 3j + 9k]} [2i + 3j + 9k]$$
$$= \frac{3}{86} \frac{(18 + 3 - 18)}{4 + 9 + 81} [2i + 3j + 9k] = \frac{3}{86} \frac{3}{94} [2i + 3j + 9k]$$

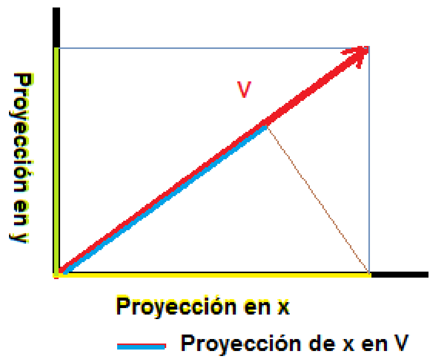


Figura 1: Se muestran las proyecciones de V en x e y. La magnitud de la proyección de x en V; Vp es menor que V

Lo que es correcto salvo en la magnitud como se muestra en la figura 1.

Entonces se requeriría conocer un factor de escalamiento para regresar completamente al vector original.

Considere el vector

$$V = 2i + 3j$$

La proyección en el eja x es 2i y la proyección en el eje y es 3j.

La proyección de 2i sobre V sería

$$V_{px} = \frac{2i \cdot (2i + 3j)}{(2i + 3j) \cdot (2i + 3j)} (2i + 3j)$$

$$V_{px} = \frac{4}{13} (2i + 3j)$$

Sin embargo la proyección de 3j sobre V sería

$$V_{py} = \frac{3j \cdot (2i + 3j)}{(2i + 3j) \cdot (2i + 3j)} (2i + 3j) = \frac{9}{13} (2i + 3j)$$

Este par de ecuaciones nos indican que el vector original V no es más que la suma de las proyecciones de los dos vectores ortogonales.

$$V = V_{px} + V_{py}$$

El proceso de ortogonalización de Gram Schmidt nos permite conocer vectores ortogonales usando proyecciones (Ben Noble 1977) se fundamenta precisamente en que el vector actual V es la suma de las proyecciones sobre otro vector V1 y un ortogonal a V1 que es V2, con la característica de que las proyecciones de un vector V siempre forman un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es precisamente V. (Figura 2)

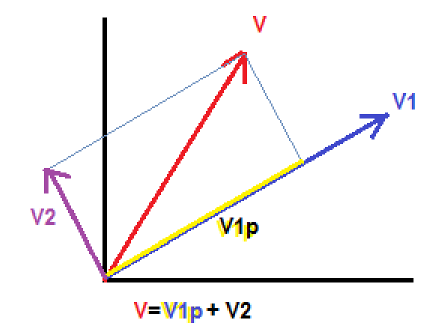


Figura 2: Las proyecciones de V son ortogonales entre sí.

Acorde a la ecuación

$$V = V_{1p} + V_2$$

V2 puede calcularse a partir de V y su proyección sobre el vector V1; V1p.

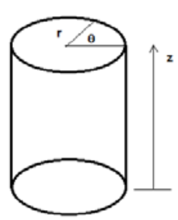
$$V_2 = V - V_{1p}$$

Es la idea del método de Gram Schmidt en este caso el vector V tiene una base compuesta por V1p y V2, los cuales al ser ortogonales son independientes entre sí.

Proyecciones en sistemas de coordenadas no cartesianas

Los indicadores de dirección i, j y k en coordenadas cartesianas, tienen una proyección en otro sistema de coordenadas.

Las equivalencias en coordenadas cilíndricas para los valores de x, y y z se muestran en la figura 3.



$x = rcos(\theta)$

$y = rsen(\theta)$

$z = z$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$

$z = z$

Figura 3: Equivalencias entre coordenadas cartesianas y cilíndricas

El punto con coordenadas cartesianas (1,-4,3), tiene coordenadas cilíndricas $(r, \theta, z) = \left(\sqrt{1^2 + (-4)^2}, \operatorname{atan}(\frac{-4}{1}), 3\right)$ =(4.1231,-1.3258,3). (Marsden 1991)

Con las equivalencias un vector cartesiano

$$V = 3i + 2j + k$$

Se expresa en términos de r,θ y z

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3.6$$

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$z = 1$$

En la práctica el vector en dirección dr en posición θ es ortogonal al vector tangencial rdθ en θ y ambos ortogonales al vector z (figura 4). Esos tres vectores particulares forman el vector en coordenadas cilíndricas.

$$x = rcos(\theta); dx = \cos(\theta)\, dr - rsen(\theta)d\theta; i = \cos(\theta)\, a_r - rsen(\theta)a_\theta$$

$$y = rsen(\theta); dy = \operatorname{sen}(\theta)\, dr + rcos(\theta)d\theta; j = \operatorname{sen}(\theta)\, a_r + rcos(\theta)a_\theta$$

Naturaleza y Tecnología
Septiembre-Diciembre 2021
ISSN 2007-672X
Universidad de Guanajuato

$$z = z: dz = dz; k = a_z$$

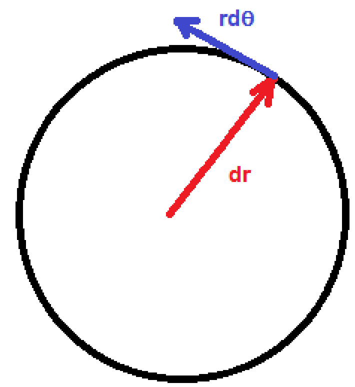


Figura 4: dr es ortogonal a la componente tangencial $rd\theta$ y éstas ortogonales a dz.

La proyección de 3i en a_r y a_θ

$$\frac{(3\cos(\theta)\,a_r - 3rsen(\theta)a_\theta)\cdot a_r}{a_r \cdot a_r} a_r = 3cos(\theta)\,a_r$$

$$\frac{(3\cos(\theta)\,a_r - 3rsen(\theta)a_\theta)\cdot a_\theta}{a_\theta \cdot a_\theta} a_\theta = -3rsen(\theta)\,a_\theta$$

La proyección de 2j en a_r y a_θ

$$\frac{(2\,\mathrm{sen}(\theta)\,a_r + 2rcos(\theta)a_\theta)\cdot a_r}{a_r \cdot a_r} a_r = 2sen(\theta)\,a_r$$

$$\frac{(2\,\mathrm{sen}(\theta)\,a_r + 2rcos(\theta)a_\theta)\cdot a_\theta}{a_\theta \cdot a_\theta} a_\theta = 2rcos(\theta)\,a_\theta$$

En el vector 3i+2j+k, las componentes a_θ proyecciones de 3i y 2j tienen direcciones de la misma magnitud pero opuestas $|-3rsen(\theta)\,| = |2rcos(\theta)|$.

De acuerdo con (Hyat 1991) y conforme a lo discutido en líneas previas se define el producto punto entre sistema cartesiano y cilíndrico, para r=1 según la tabla 1.

Tabla 1: Producto punto entre coordenadas cartesianas y cilíndricas

	a_r	a_θ	a_z
$i\cdot$	$\cos(\theta)$	$-sen(\theta)$	0
$j\cdot$	$sen(\theta)$	$\cos(\theta)$	0
$k\cdot$	0	0	1

Cabe hacer notar que la matriz dentro de la tabla 1, es en realidad una matriz de rotación, que lleva el eje x, justo a donde se encuentra r; al rotar los ejes un ángulo θ. (Pita-Ruiz 1995)

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{bmatrix}$$

Bajo la idea de la proyección de un vector en nuevas direcciones.

El vector $3i + 2j + k$ en coordenadas cilíndricas tiene dos posibilidades

$1.664a_r + 6a_\theta + a_k$ o bien $1.664a_r - 6a_\theta + a_k$ El primero en base a la proyección de i; mientras que el segundo en base a la proyección de j. La naturaleza cuadrática de la base polar da como resultado esas dos posibilidades.

En base a la definición de $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$dr = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2x)dx + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}(2y)dy; \boldsymbol{a_t} = \cos(\theta)\,\boldsymbol{i} + sen(\theta)\boldsymbol{j}$$

$$d\theta = -\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x^2}\right)dx + \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)\ dy = -\frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$
$$= -\frac{1}{r}sen(\theta)dx + \frac{1}{r}\cos(\theta)\,dy = \boldsymbol{a_\theta} = -\frac{1}{r}sen(\theta)\boldsymbol{i} + \frac{1}{r}\cos(\theta)\,\boldsymbol{j}$$

Tabla 2: Definición de producto punto entre cartesianas y cilíndricas. Para r=1			
	i	j	k
$a_r\cdot$	$\cos(\theta)$	$sen(\theta)$	0
$a_\theta\cdot$	$-sen(\theta)$	$\cos(\theta)$	0
$a_z\cdot$	0	0	1

Lo que se encuentra en la tabla es la inversa de la matriz P

$$P = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ P^{-1} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} dr \\ rd\theta \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) & 0 \\ -sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix}$$

Vectores en Coordenadas esféricas

La figura 5 muestra las ecuaciones equivalentes para calcular coordenadas esféricas a partir de cartesianas y viceversa. El punto localizado en coordenadas cartesianas (1,-4,3) se representa como $(r, \theta. \varphi) = (5.099, 094, -1.3258)$ en coordenadas esféricas.

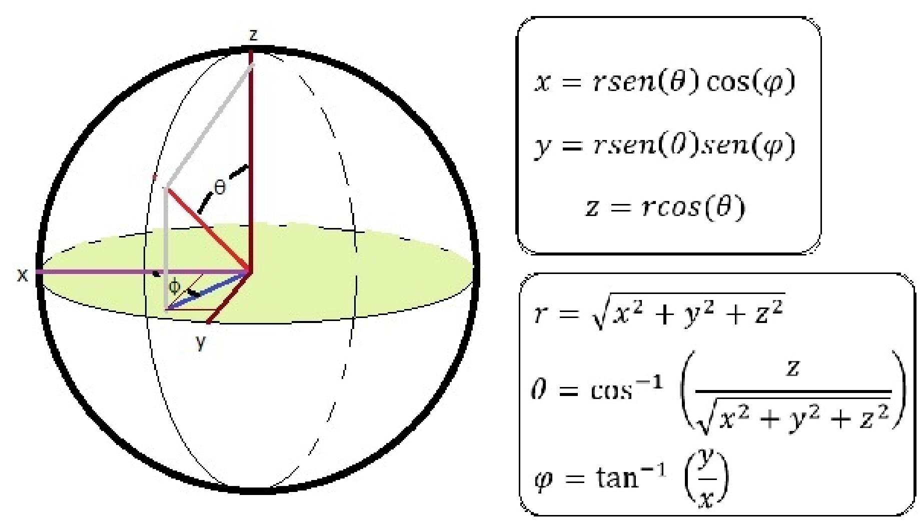


Figura 5: Esquema que muestra la definición de coordenadas esféricas.

Pero diferenciando para encontrar las proyecciones en r y los ángulos.

$$dx = sen(\theta)\cos(\varphi)\,dr + rcos(\theta)cos(\varphi)d\theta - rsen(\theta)sen(\varphi)d\varphi;$$

$$\boldsymbol{i} = sen(\theta)\cos(\varphi)\,a_r + rcos(\theta)cos(\varphi)\boldsymbol{a_\theta} - rsen(\theta)sen(\varphi)\boldsymbol{a_\varphi}$$

$$dy = sen(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\,dr + rcos(\theta)sen(\varphi)d\theta + rsen(\theta)\cos(\varphi)\,d\varphi;$$

$$j = sen(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)\,a_r + rcos(\theta)sen(\varphi)a_\theta + rsen(\theta)\cos(\varphi)\,a_\varphi$$

$$dz = \cos(\theta)\,dr - rsen(\theta)d\theta; k = \cos(\theta)\,a_r - rsen(\theta)a_\theta$$

Tabla 3: Producto puntos entre sistemas cartesianos y esféricos r=1			
	a_r	a_θ	a_φ
$i\,\cdot$	$sen(\theta)\cos(\varphi)$	$cos(\theta)cos(\varphi)$	$-sen(\theta)sen(\varphi)$
$j\,\cdot$	$sen(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$	$cos(\theta)sen(\varphi)$	$sen(\theta)\cos(\varphi)$
$k\,\cdot$	$\cos(\theta)$	$-sen(\theta)$	0

Otros sistemas coordenados

Coordenadas cilíndricas parabólicas

$$x = \mu\varphi$$

$$y = \frac{1}{2}(\mu^2 - \varphi^2)$$

$$z = z$$

$$dx = \varphi d\mu + \mu d\varphi;\;\; i = \varphi a_\mu + \mu a_\varphi$$

$$dy = \mu d\mu - \varphi d\varphi;\;\; j = \mu a_\mu - \varphi a_\varphi$$

Vector r

Factores de escala

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial \mu}\right\| = \left\|\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right\| = \sqrt{\mu^2 + \varphi^2}$$

Coordenadas cilíndricas elípticas

$$x = \mathrm{a}\cosh(\theta)\;\cos(\varphi)$$

$$y = a\ senh(\theta)\ sen(\varphi)$$

$$z = z$$

Vector r

$$r = \mathrm{a}\cosh(\theta)\cos(\varphi)\,\mathrm{i} + \mathrm{a}\sinh(\theta)\sin(\varphi)\,\mathrm{j} + \mathrm{zk}$$

Factores de escala

$$h_1 = h_2 = \left\|\frac{\partial r}{\partial \theta}\right\| = \left\|\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right\| = a\sqrt{(\sinh(\theta))^2 + sin^2(v)}; \quad \mathrm{asinh}(\theta)\cos(\theta)$$

$$h_\varphi = a\big(senh(\theta)\big)$$

Transformación de campos vectoriales

Enfocado en las ecuaciones de Helmotz y Maxwell (Adán 2012), hace una revisión de la transformación de coordenadas, en las que hay que tomar en consideración que en campos vectoriales, no sólo hay elementos constantes o lineales, sino también elementos cambiantes de área, volumen y otras funciones no lineales. Pese a la importancia del tema varios libros de cálculo vectorial (Marsden 1991) se enfocan sólo en la transformación puntos localizados en coordenadas euclidianas a otros sistemas coordenados, no se profundiza en funciones vectoriales en diversos sistemas de coordenadas. Se puede interpretar un campo escalar dW como el resultado del producto punto de un campo vectorial y un vector de desplazamiento ds (Kreyszig 2003), llamado término lineal.

$$ds = dxi + dyj + dzk$$

$$F = F_1 i + F_2 j + F_3 k;$$

$$dW = F \cdot ds = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

En coordenadas cilíndricas $x = x(r, \theta, z);\ y = y(r, \theta, z);\ z = z(r, \theta, z)$ por lo que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial x}{\partial z}dz; dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial y}{\partial z}dz; dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial z}{\partial z}dz$$

Similarmente un sistema arbitrario con componentes de coordenadas q_1, q_2, q_3 se representa

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}dq_3;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}dq_3;$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3$$

$$ds \cdot ds = ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$\begin{aligned} ds^2 = {} & \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3\right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3\right)^2 + 2\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 dq_1 \\ & + 2\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 dq_1 + 2\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 dq_1 + 2\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 dq_1 \\ & + 2\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 dq_1 + 2\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3 dq_1 \end{aligned}$$

La suma de los términos marcados en rojo es cero, si el sistema arbitrario es de componentes ortogonales.

Los términos híbridos h_i para la transformación de un sistema cartesiano a otro qi entonces estarían dados por la ecuación.

$${h_1}^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 ;\ {h_2}^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 ; {h_3}^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 ;$$

$$ds^2 = {h_1}^2 {dq_1}^2 + {h_2}^2 {dq_2}^2 + {h_3}^2 {dq_3}^2$$

La operaciones vectoriales gradiente, divergencia, laplaciano y rotacional se calculan usando los términos según las ecuaciones (Kreyszig 2003).

$$\nabla H = \frac{1}{h_1}\frac{\partial H}{\partial q_1} u + \frac{1}{h_2}\frac{\partial H}{\partial q_2} v + \frac{1}{h_3}\frac{\partial H}{\partial q_3} w$$

$$div(F) = \nabla \cdot F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial h_2 h_3 F_1}{\partial q_1} + \frac{\partial h_1 h_3 F_2}{\partial q_2} + \frac{\partial h_1 h_2 F_3}{\partial q_3}\right]$$

$$\nabla \cdot \nabla H = \nabla \cdot \nabla H = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial \frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial H}{\partial q_1}}{\partial q_1} + \frac{\partial \frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial H}{\partial q_2}}{\partial q_2} + \frac{\partial \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial H}{\partial q_3}}{\partial q_3}\right]$$

$$rot(F) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1 u & h_2 v & h_3 w \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 F_1 & h_2 F_2 & h_3 F_3 \end{vmatrix}$$

El campo vectorial

$$V = 3xyzi + 2xj + 3yxk$$

En términos de equivalente en coordenadas cilíndricas,

$$V = 3r^2\cos(\theta)\, sen(\theta) zi + 2rcos(\theta) j + 3r^2 sen(\theta)\cos(\theta)\, k$$

Aunque cada uno de los componentes se encuentra expresado a su equivalente en coordenadas cilíndricas los indicadores i,j,k son cartesianos.

Restaría colocar sus equivalentes para expresar completamente en términos de componentes cilíndricas.

Conclusiones

La principal motivación para la escritura de la discusión del presente artículo fue la observación que usualmente se confunde la representación de localización espacial con un vector, en coordenadas no euclidianas no son iguales. Se usa el concepto de proyección para representar equivalentes de dos sistemas de bases ortogonales distintas. Es importante mencionar que en la transformación de un campo vectorial no basta expresar cada componente en términos del nuevo sistema, sino hacer la transformación del indicador a su proyección en el nuevo sistema.

Referencias

Adán, Hernandez-Nolasco José. «Familias de campos ondulatorios fundamentos de la ecuación de Helmotz en sistemas de coordenadas curvilineas ortogonales.» *Tesis de doctorado.* Tonantzintla, Puebla: INAOE, Junio de 2012.

Ben Noble, James Daniel. *Applied linear algebra.* London: Cambridge University Press, 1977.

Florey, Francis G. *Algebra Lineal.* México D.F.: Prentice Hall, 1988.

Hyat, William. *Teoría Electromagnética.* quinta. Traducido por Angelo Bombardieri. México, D.F:: Mc Graw Hill, 1991.

Kreyszig. *Matemáticas superiores para Ingeniería.* Vol. 1. México D.F.: Limuas Wiley, 2003.

Marsden, Tromba. *Cálculo Vectorial.* Wilmington, Delaware: Addison Wesley Iberoamericana, S.A., 1991.